211. *Aussagenkalkül* ニ於ケル"命題"ノ定義ニ就イテ(II)

伊藤　誠(御影師)

[1] 前稿(I)ニ於イテ論理的 *Operator* ガC及ビN

ノニツデアル場合ニツイテ"命題"ヲ定義シタ。ソシテ此ノ定義ニ従ッテ Menger ノ定理ヲ証明シ、猶又 n 次ノ命題ノ数ヲ求メタ。コノ所論ヲ一般ノ場合ニ擴張シタラ如何ナルデアラウカ? 以下ソレニ就イテ考ヘテミタイ。

前ト同様ニ

$$\alpha_0 = \{p_1, p_2, \cdots\cdots, p_{a_0}\}$$

ヲ Elementare Aussagenvariablen ノ集合トスル。

今 N (Negation) ノ如キ einstelling ナ論理的 Operator ヲ γ_1 個考ヘ、之レヲ $C_1^{(1)}, C_2^{(1)}, \cdots\cdots, C_{\gamma_1}^{(1)}$ デ表ハシ、コノ集合ヲ $\Gamma^{(1)}$ トスル。即チ

$$\Gamma^{(1)} = \{C_1^{(1)}, C_2^{(1)}, \cdots\cdots, C_{\gamma_1}^{(1)}\},$$

同様ニ $$\Gamma^{(2)} = \{C_1^{(2)}, C_2^{(2)}, \cdots\cdots, C_{\gamma_2}^{(2)}\},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Gamma^{(r)} = \{C_1^{(r)}, C_2^{(r)}, \cdots\cdots, C_{\gamma_r}^{(r)}\},$$

トスル。

コヽニ $C^{(\lambda)}$ ハ λ-stelling ナ Operator ヲ表ハシテヰルガ、コレカラ之ヲ位数 λ ノ Operator ト呼ブコトニスル。

扨テ"n 次ノ命題" A_n ヲ前ニ倣ッテ次ノ如ク歸納的ニ定義スル:

1) $A_0 = p_i \quad (i=1,2,\cdots\cdots,a_0)$

2) $A_{n+1} = C^{(1)}A_n$

$\quad$ od. $C^{(2)}A_{i_1}A_{i_2} \quad (i_1+i_2=n)$

$\quad$ ----------------

$\quad$ ----------------

$\quad$ od. $C^{(r)}A_{i_1}A_{i_2}\cdots\cdots A_{i_r} \; (i_1+i_2+\cdots\cdots+i_r=n)$

然ルトキハ$\mathfrak{A}_i$ヲ以ッテi次ノ命題全部ヨリナル集合ヲ表ハセバ

$$\mathfrak{A}_{n+1} = \Gamma^{(1)}\mathfrak{A}_n + \sum_{i_1+i_2=n}\Gamma^{(2)}\mathfrak{A}_{i_1}\mathfrak{A}_{i_2} + \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+\sum_{i_1+i_2+\cdots\cdots+i_r=n}\Gamma^{(r)}\mathfrak{A}_{i_1}\mathfrak{A}_{i_2}\cdots\cdots\cdots\mathfrak{A}_{i_r}$$

ナル関係が成リ立ツ。但シコヽニ $\Gamma^{(\nu)}\mathfrak{A}_{i_1}\cdots\cdots\cdots\mathfrak{A}_{i_\nu}$ ハ $C^{(\nu)}A_{i_1}\cdots\cdots\cdots A_{i_\nu}$ トル形ノ命題全部ヲ表ハスモノトスル。

今、斯様ニシテ定義サレタn次ノ一ツノ命題 A_n 中ニ於ケル

$$\begin{cases} p\text{ノ数ヲ} & \pi_n \\ C^{(1)} \;\; 〃 & c_n^{(1)} \\ C^{(2)} \;\; 〃 & c_n^{(2)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ C^{(r)} \;\; 〃 & c_n^{(r)} \end{cases}$$

トスレバ明ラカニ

$$\sum_{\lambda=1}^{r} C_n^{(\lambda)} = n$$

ニシテ、且ツ

$$\text{(I)} \quad \boxed{\pi_n = \sum_{\lambda=1}^{r} C_n^{(\lambda)}(\lambda-1)+1}$$

ナル関係ノアルコトガ知ラレル。之レヲ下ニ証明シテミヤウ。

〔証明〕 n ニ就イテ Induktion ヲ行フ。

α) $n=0$ ノトキハ $C_n^{(\lambda)}=0$ $(\lambda=1, 2, \cdots\cdots, r)$ ニシテ $\pi_0=1$ ナル故確カニ上式ハ成リ立ツ。

β) $i=1, 2, \cdots\cdots, n$ マデノ A_i ニ就イテハ (I)ガ成リ立ツト仮定スル。然ルトキハ定義ニヨッテ A_{n+1} ハ次ノ如キ形デアル。

$$A_{n+1} = C^{(\nu)} A_{i_1}, A_{i_2}, \cdots\cdots\cdots, A_{i_\nu}$$

$$(i_1+i_2+\cdots\cdots+i_\nu=n)$$

従ッテ

$$\begin{aligned}\pi_{n+1} &= \pi_{i_1}+\pi_{i_2}+\cdots\cdots\cdots+\pi_{i_\nu} \\ &= \left[\sum_{\lambda=1}^{r} C_{i_1}^{(\lambda)}(\lambda-1)+1\right]+\left[\sum_{\lambda=1}^{r} C_{i_2}^{(\lambda)}(\lambda-1)+1\right]+\cdots\cdots \\ &\qquad +\left[\sum_{\lambda=1}^{r} C_{i_\nu}^{(\lambda)}(\lambda-1)+1\right] \\ &= \sum_{\lambda=1}^{r}\left(C_{i_1}^{(\lambda)}+C_{i_2}^{(\lambda)}+\cdots\cdots+C_{i_\nu}^{(\lambda)}\right)(\lambda-1)+\nu\end{aligned}$$

然ル＝今ノ場合

$$\begin{cases} C_{i_1}^{(\lambda)}+C_{i_2}^{(\lambda)}+\cdots\cdots+C_{i_\nu}^{(\lambda)}=C_{n+1}^{(\lambda)} & (\lambda\neq\nu) \\ \quad〃 \qquad\qquad 〃 \qquad =C_{n+1}^{(\nu)}-1 & (\lambda=\nu) \end{cases}$$

ナル故，上式ハ

$$=\sum_{\lambda=1,\,\lambda\neq\mu}^{r} C_{n+1}^{(\lambda)}(\lambda-1)+(C_{n+1}^{(\nu)}-1)(\nu-1)+\nu$$

$$=\sum_{\lambda=1}^{r} C_{n+1}^{(\lambda)}(\lambda-1)+1$$

トナル。　即チ $i=n+1$ ノトキニモ（I）ガ成リ立ツコトト ナル。 α), β) ＝ヨツテ（I）ガ一般＝成立スルコトガ分ツタ。

此ノ（I）式ハ前稿＝述ベタ Menger ノ條件（I）＝相等スルモノデアツテ、實際此ノ式＝於イテ $r=2$ トオケバ

$$\pi_n=\sum_{\lambda=1}^{2} C_n^{(\lambda)}(\lambda-1)+1=C_n^{(2)}+1$$

トナツテ Menger ノ條件（I）ガ得ラレル。

更＝ Menger ノ條件（II）＝相等スルモノハ何デアラウカ？之ハ次ノ不等式デ與ヘラレル：

$$\text{(II)}\quad \boxed{\pi_n(\mu)\leqq\sum_{\lambda=1}^{r} C_n^{(\lambda)}(\mu)(\lambda-1),\ (\mu=1,2,\cdots\cdots,m-1)}$$

但シ、コヽ＝ $\pi_n(\mu)$ ハ A_n ＝於イテ μ 番目ノ文字マデ

ノ Anfangsschnitt $A_n(\mu)$中ノpノ數ヲ表ハシ，$C_n^{(\lambda)}(\mu)$ハ同様ニ$A_n(\mu)$中ノ Ordnung λナル Operator ノ數ヲ表ハス。又 m ハ A_n ヲ形成スル文字全部ノ數，即チ

$$m = \pi_n + n$$

デアルトスル。

此ノ不等式(II)ノ證明ハ(I)ト同様ニ n ニ就イテノ Induktion ニ依ル。

〔證明〕

α) $n=1$ ノトキハ

$$A^{(1)} = C^{(\nu)} p_{i_1} p_{i_2} \cdots\cdots p_{i_\nu} \quad (1 \leqq i_1, i_2, \cdots, i_\nu \leqq a_0)$$

ナル形デアルカラ

$$\pi_1(\mu) = \mu - 1$$

又 $$\sum_{\lambda=1}^{r} C_1^{(\lambda)}(\mu)(\lambda-1) = c_1^{(\nu)}(\mu-1) = 1 \times (\mu-1) = \mu-1,$$

然ルニ $\mu \leqq \nu,$

故ニ $$\pi_1(\mu) \leqq \sum_{\lambda=1}^{r} C_1^{(\lambda)}(\mu)(\lambda-1)$$

トナリ、上ノ不等式ハ確カニ成立スル。

β) $n = 1, 2, 3, \cdots\cdots, n$ マデノ値ニ對シテハ、不等式(II)ガ成立シタト假定スル。然ルトキハ A_{n+1} ハ

$$A_{n+1} = C^{(\nu)} A_{i_1} A_{i_2} \cdots\cdots A_{i_\rho} \cdots\cdots A_{i_\nu}$$

ナル形デアルカラ、μ 個ノ文字ヨリ成ルソノ echte

Anfangsschnitt Q_μヲ考ヘルト，夫レハ次ノ二ツノ場合ニ分レル。

(i) $Q(\mu) = C^{(\nu)} A_{i_1} A_{i_2} \cdots\cdots A_{i_\rho} \qquad (\rho < \nu)$

(ii) $Q(\mu) = C^{(\nu)} A_{i_1} A_{i_2} \cdots\cdots A_{i_{\rho-1}} A'_{i_\rho}(\mu') \quad (\rho \leqq \nu)$

但シ、$A'_{i_\rho}(\mu')$ ハ A_{i_ρ} ノ echte Anfangsschnitt ヲ表ハシ，μ' 個ノ文字カラナルモノトスル。

(i) ノ場合： $\pi_{n+1}(\mu)$ ハ $Q(\mu)$ 中ノ p ノ数ニシテ．ソレハ $A_{i_1}, A_{i_2}, \cdots\cdots, A_{i_\rho}$ 中ノ p ノ數ノ和ニ等シイ。即チ

$$\pi_{n+1}(\mu) = \pi_{i_1} + \pi_{i_2} + \cdots\cdots + \pi_{i_\rho}$$

コレハ先ニ証明シタ式 (I) ニヨリ

$$= \left[\sum_{\lambda=1}^{r} C_{i_1}^{(\lambda)}\cdot(\lambda-1)+1\right] + \left[\sum_{\lambda=1}^{r} C_{i_2}^{(\lambda)}\cdot(\lambda-1)+1\right] + \cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots + \left[\sum_{\lambda=1}^{r} C_{i_\rho}^{(\lambda)}\cdot(\lambda-1)+1\right]$$

$$= \sum_{\lambda=1}^{r}\left(C_{i_1}^{(\lambda)} + C_{i_2}^{(\lambda)} + \cdots\cdots + C_{i_\rho}^{(\lambda)}\right)\cdot(\lambda-1) + \rho$$

然ルニ

$$\begin{cases} C_{i_1}^{(\lambda)} + C_{i_2}^{(\lambda)} + \cdots\cdots + C_{i_\rho}^{(\lambda)} = C_{n+1}^{(\lambda)}(\mu) & (\lambda \neq \nu) \\ \qquad \text{〃} \qquad\qquad \text{〃} \qquad = C_{n+1}^{(\nu)}(\mu) - 1 & (\lambda = \nu) \end{cases}$$

ナル故、上式ハ次ノ如クナル。

$$\pi_{n+1}(\mu)=\sum_{\lambda=1,\,\lambda\neq\nu}^{r} C_{n+1}^{(\lambda)}(\mu)\cdot(\lambda-1)+C_{n+1}^{(\nu)}(\mu)\cdot(\nu-1)+\rho$$

$$=\sum_{\lambda=1}^{r} C_{n+1}^{(\lambda)}(\mu)\cdot(\lambda-1)-(\nu-\rho-1),$$

而シテ　$\rho<\nu$　デアルカラ，

$$\nu-\rho-1\geqq 0$$

故＝　$$\pi_{n+1}(\mu)\leqq\sum_{\lambda=1}^{r} C_{n+1}^{(\lambda)}(\mu)\cdot(\lambda-1)$$

即チ　$n=n+1$ ＝對シテ（II）ガ成立スルコトトナル。

(ii) ノ場合：　コノ場合＝ハ

$$\pi_{n+1}(\mu)=\pi_{i_1}+\pi_{i_2}+\cdots\cdots+\pi_{i_{\rho-1}}$$
$$+(A'_{i_\rho}(\mu')\text{ 中ノ }p\text{ ノ数})$$

トナル。而シテ $\pi_{i_1},\cdots\cdots,\pi_{i_{\rho-1}}$ ハ前式（I）＝ヨツテ與ヘラレ，又 $i_\rho\leqq n$ ナル故，假定＝ヨリ

$$(A'_{i_\rho}(\mu')\text{ 中ノ }p\text{ ノ數})\leqq\sum_{\lambda=1}^{r} C_{i_\rho}^{(\lambda)}(\mu')\cdot(\lambda-1)$$

從ツテ

$$\pi_{n+1}(\mu)\leqq\left[\sum_{\lambda=1}^{r} C_{i_1}^{(\lambda)}\cdot(\lambda-1)+1\right]+\left[\sum C_{i_2}^{(\lambda)}\cdot(\lambda-1)+1\right]+\cdots\cdots$$

$$+\left[\sum_{\lambda=1}^{r} C_{i_{\rho-1}}^{(\lambda)}\cdot(\lambda-1)+1\right]+\sum_{\lambda=1}^{r} C_{i_\rho}^{(\lambda)}*(\mu')\cdot(\lambda-1)$$

$$=\sum\left(C_{i_1}^{(\lambda)}+C_{i_2}^{(\lambda)}+\cdots\cdots+C_{i_{\rho-1}}^{(\lambda)}+C_{i_\rho}^{(\lambda)}(\mu')\right)\cdot(\lambda-1)+(\rho-1)$$

然ルニ

$$\begin{cases} C_{i_1}^{(\lambda)}+C_{i_2}^{(\lambda)}+\cdots\cdots+C_{i_{\rho-1}}^{(\lambda)}+C_{i_\rho}^{(\lambda)}(\mu')=C_{n+1}^{(\lambda)}(\mu) & (\lambda\neq\nu) \\ \qquad\text{〃}\qquad\qquad\qquad\text{〃}\qquad\qquad =C_{n+1}^{(\nu)}(\mu)-1 & (\lambda=\nu) \end{cases}$$

ナル故，上式ハ次ノ如クナル；

$$=\sum_{\lambda=1,\,\lambda\neq\nu}^{r} C_{n+1}^{(\lambda)}(\mu)\cdot(\lambda-1)+\left(C_{n+1}^{(\nu)}(\mu)-1\right)\cdot(\nu-1)+(\rho-1)$$

$$=\sum_{\lambda=1}^{r} C_{n+1}^{(\lambda)}(\mu)\cdot(\lambda-1)-(\nu-\rho)$$

而シテ $\nu\geqq\rho$ デアルカラ、結局

$$\pi_{n+1}(\mu)\leqq\sum_{\lambda=1}^{r} C_{n+1}^{(\lambda)}(\mu)\cdot(\lambda-1)$$

$$(\mu=1,2,\cdots\cdots\cdots,m-1)$$

ヲ得ル。 α）及ビ β）デ帰納法ニヨル（II）式ノ証明ハ完結シタ．

扨テ上述ニヨリ（I）及ビ（II）式ハ $p_i\,(i=1,2,\cdots\cdots,a_0)$ 並ビニ $C_l^{(\lambda)}\,(\lambda=1,2,\cdots\cdots,r;\ l=1,2,\cdots\cdots,\gamma_\lambda)$ 等ノ文字カラ成ルーツノ順序集合ガ *Aussage* ヲ表ハス爲メ必要條件デアルコトガワカッタ。

——（ツヅク）——